

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (q < 1); \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ 2. Định lý: a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim (u_n + v_n) = a + b$ $\lim (u_n - v_n) = a - b$ $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0)$ b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ c) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$ d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_n = a$ 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad (q < 1)$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad (q > 1)$ 2. Định lý: a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ b) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a \cdot v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a \cdot v_n < 0 \end{cases}$ d) Nếu $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a$ thì $\lim (u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

• Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của n .

VD: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2} = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$

• Nhân lượng liên hợp: Dùng các hằng đẳng thức

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b; (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$

VD: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3n}-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{2}$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và của mẫu.

• Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu (ta thường đặt nhân tử chung của tử, mẫu riêng).

Bài 1. Tính các giới hạn sau: (Chia cả tử và mẫu cho n^a với số mũ a cao nhất Hoặc đặt nhân tử chung)

1) $\lim(n^2 - n + 1)$ ĐS: $+\infty$

2) $\lim(-n^2 + n + 1)$ ĐS: $-\infty$

3) $\lim \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$ ĐS: $+\infty$

4) $\lim \frac{2n+1}{n^3 + 4n^2 + 3}$ ĐS: 0

5) $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$ ĐS: 0

6) $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$ ĐS: 0

7) $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$ ĐS: $2/3$

8) $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$ ĐS: 3

9) $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$ ĐS: 1

10) $\lim \frac{-n^2 + n - 1}{2n^2 - 1}$ ĐS: $-1/2$

11) $\lim \lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$ ĐS: $+\infty$

12) $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{4 - n^2}$ ĐS: $-\infty$

13) $\lim \frac{-4n^2 + 2n + 5}{3n + 1}$ ĐS: $-\infty$

Bài 2. Tính các giới hạn sau: (Chia cho lũy thừa có cơ số lớn nhất)

1) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n}$ ĐS: 1

2) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ ĐS: 7

3) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$ ĐS: 0

4) $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ ĐS: 5

5) $\lim \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n}$ ĐS: $-1/2$

6) $\lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$ ĐS: $1/3$

Bài 3. Tính các giới hạn sau: (Tử ở dạng vô cùng $\pm$ vô cùng; Mẫu ở dạng vô cùng $+$ vô cùng; bậc của tử và mẫu bằng nhau thì ta chia cho số mũ cao nhất của tử hoặc mẫu)

1) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$ ĐS: 2

2) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 3} - n - 4}{\sqrt{n^2 + 2} + n}$ ĐS: 0

3) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}$ ĐS: 2

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

- Nếu bài toán có dạng: $+$ Vô cùng $-$ vô cùng không có mẫu (hệ số của n bậc cao nhất giống nhau).
+ Cả tử và mẫu ở dạng: Vô cùng $-$ vô cùng. (hệ số của bậc cao nhất giống nhau)

Thì ta nhân liên hợp có căn bậc 2,3 rồi chia cho lũy thừa có số mũ cao nhất

- Nếu bài toán ở dạng vô cùng $+$ vô cùng thì kq là vô cùng ta đặt nhân tử chung có mũ cao nhất rồi tính giới hạn. Hoặc hệ số của n bậc cao nhất khác nhau ta chia hoặc đặt nhân tử chung.

1) $\lim(\sqrt{n^2 + 3n} + n)$ ĐS: $+\infty$

2) $\lim(\sqrt{n^2 - 2n} - n + 2013)$ ĐS: 2012

3) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$ ĐS: $-1/2$

4) $\lim(\sqrt{n^2 + 1} - n + 5)$ ĐS: 5

5) $\lim(\sqrt{n^2 + 2013} - n + 5)$ ĐS: 5

6) $\lim(\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1)$ ĐS: 0

7) $\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2})$ ĐS: $1/2$

8) $\lim(\sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1)$ ĐS: -1

$$9) \lim \left(1 + n^2 - \sqrt{n^4 + 3n + 1} \right) \text{ ĐS: } 1$$

$$10) \lim \frac{\sqrt{n^2 - 4n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{\sqrt{3n^2 + 1} - n} \text{ ĐS: } -1/(\sqrt{3} - 1)$$

$$11) \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}} \text{ ĐS: } -\infty$$

$$12) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n} \text{ ĐS: } -1/2$$

II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \text{ (c: hằng số)}$ 2. Định lý: a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \end{cases}$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{)}$ b) Nếu $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$ thì $L \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ c) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L $ 3. Giới hạn một bên: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$ 2. Định lý: a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ thì: * $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ b) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$ Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

Một số phương pháp khử dạng vô định:

1. Dạng $\frac{0}{0}$

a) $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức và $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

VD: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$

b) $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và $P(x), Q(x)$ là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

c) $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và $P(x)$ là biểu thức chứa căn không đồng bậc

$$\text{Giả sử: } P(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)} \text{ vô cùng } \sqrt[n]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a.$$

$$\text{Ta phân tích } P(x) = (\sqrt[n]{u(x)} - a) + (a - \sqrt[n]{v(x)}).$$

$$\begin{aligned} \text{VD: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2. **Dạng** $\frac{\infty}{\infty}$: $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu $P(x), Q(x)$ là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x .

– Nếu $P(x), Q(x)$ có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

$$\text{VD: a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1$$

3. **Dạng** $\infty - \infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0$$

4. **Dạng** $0 \cdot \infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$$

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

+ Khi thay $x=a$ vào $f(x)$ thấy mẫu khác 0 thì giới hạn bằng $f(a)$.

+ Khi thay $x=a$ vào $f(x)$ thấy mẫu bằng 0 tử khác 0 thì giới hạn bằng ∞ .

1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x)$. ĐS: 12

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$ ĐS: $\pm\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$ ĐS: 1

4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ ĐS: -3/2

5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x}$ ĐS: $\sqrt{2}/\pi$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3}$ ĐS: -2/3

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$ ĐS: $\sqrt{3}$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$ ĐS: $\sqrt{2}/2$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-2} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1} \quad \text{ĐS: } 0$$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau: (Khi thay $x=a$ vào $f(x)$ thấy tử $=0$; mẫu $\neq 0$ ta rút gọn mất nhân tử rồi thay tiếp tới khi mẫu khác 0 là xong), còn nếu mẫu $=0$ tử khác 0 thì kq là ∞

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^6-5x^5+x}{x^2-1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x \left(2 - \frac{1}{x} \right) \quad \text{ĐS: } -1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) \quad \text{ĐS: } -1/2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \quad \text{ĐS: } 3$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad \text{ĐS: } -1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right) \quad \text{ĐS: } 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} \quad \text{ĐS: } 5$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1992}+x-2}{x^{1990}+x-2} \quad \text{ĐS: } 1993/1992$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^3+2x^2} \quad \text{ĐS: } -8$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad \text{chú ý tổng của CSN ĐS: } m/n$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)(1+9x)-1}{x} \quad \text{ĐS: } 14$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+5x-3}{x^2-1} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} \quad \text{ĐS: } 6$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} \quad \text{ĐS: } n(n+1)/2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2} \quad \text{ĐS: } n(n-1)/2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5+1}{x^3+1} \quad \text{ĐS: } 5/3$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2} \quad \text{ĐS: } 10$$